Universidad Simón Bolivar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas

Abr-Jul 2024
Matemáticas III (MA-1116) - Sección 2
3^{er} Examen Parcial (35 %)
Modelo B

Nombre y Apellido: **Carnet:**

1. (Valor: 4 puntos) Demuestre que los vectores v_i forman una base ortogonal B, luego expresar el vector w como una combinacion lineal de dichos vectores v_i y proporcionar el vector coordenada $[w]_B$
$$v_1 = (3,1)^t \;\; ; \;\; v_2 = (-2,6)^t \;\; ; \;\; w = (1,2)^t$$

2. (Valor: 4 puntos) Sean B_1 y B_2 dos bases dadas en $\mathbb{P}_2$. Hallar la matriz de cambio de base de B_1 a B_2, luego escribir el polinomio $p(x)$ de la base B_1 a la base B_2.
$$B_1 = \{1+x, 1+x^2, x+x^2\} \;\; ; \;\; B_2 = \{1, x, 1+x+x^2\} \;\; ; \;\; p(x) = 2 - x + 3x^2$$

3. (Valor: 9 puntos) COMPLEMENTO ORTOGONAL

   a.- (Valor: 4 puntos) Encontrar el complemento ortogonal $W^\perp$ de W y proporcionar una base para $W^\perp$.
$$W = \{(x,y,z)^t \in \mathbb{R}^3 : x = t,\ y = -t,\ z = 3t\}$$

   b.- (Valor: 5 puntos) Encontrar la descomposicion ortogonal del vector v cono respecto a W.
$$v = (4,-2,3)^t \;\; ; \;\; W = gen\{(1,2,1)^t, (1,-1,1)^t\}$$

4. (Valor: 9 puntos) ESPACIOS CON PRODUCTO INTERNO Y PROYECCIONES

   a.- (Valor: 4 puntos) Sea $\langle u, v\rangle$ un producto interno. Demuestre que la proposicion dada es una identidad.
$$\langle u+v, u-v\rangle = \|u\|^2 - \|v\|^2$$

   b.- (Valor: 5 puntos) Aplique el método de Gram - Schmidt a la base B para obtener una base ortonormal para el espacio con producto interno V relativo al producto interno dado.
$$V = \mathbb{P}_2[0,1] \;\; ; \;\; B = \{1, 1+x, 1+x+x^2\} \;\; ; \;\; \langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

5. (Valor: 9 puntos) TRANSFORMACIONES LINEALES

   a.- (Valor: 4 puntos) Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{P}_2$ una transformación lineal para la cual $T[(1,1)^t] = 1 - 2x$ y $T[(3,-1)^t] = x + 2x^2$. Encontrar $T[(-7,9)^t]$ y $T[(a,b)^t]$.

   b.- (Valor: 5 puntos) Hallar la matriz de transformación A_T para la transformación lineal $T : V \to W$ con respecto a las bases canónicas en V y W Luego escribir el vector $v \in V$ en términos del espacio W utilizando la matriz de transformación A_T.
$$T : \mathbb{M}_{22} \to \mathbb{M}_{22} \;\; ; \;\; T[A] = A - A^t,\ v = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$